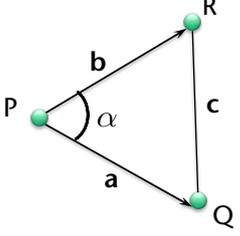


Flächeninhalte

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$$



- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$
- Achtung: dies ist eine **reine Konvention** / Definition – sie ist in keiner Weise der Geometrie inhärent!! (aber eine sehr praktische Konvention)

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 21

- Bezeichnung: $\square PQRS =$ Viereck (*quadrangle, quadrilateral*)
- Satz:

Sei PQR ein Dreieck und S ein **beliebiger** Punkt in derselben Ebene.

Dann gilt:

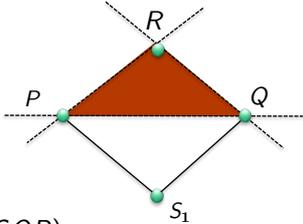
$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 22

■ Beweis:

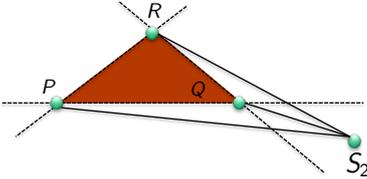
- Fall: S liegt im Inneren des Dreiecks
→ Behauptung ist klar
- Also: S liege außerhalb des Dreiecks
- Annahme: $S = S_1$
- Klar ist:

$$A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) - A(\triangle SQP)$$
 ⇒ Behauptung
- Plausibilitäts-Check: $A(\triangle SPQ) < 0$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 23

- Annahme: $S = S_2$
- Dann ist $A(\triangle SPQ) < 0$
und $A(\triangle SQR) < 0$
und $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$
⇒ Behauptung



- Falls S in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 24

- Der Flächeninhalt als Determinante:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix}, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:
 - P, Q, R in \mathbb{R}^3 einbetten mit jew. $z = 0$
 - Determinante ausrechnen und mit der z -Komponente von $(Q - P) \times (R - P)$ vergleichen

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 25

- Definition (Ohr):
Sei V^1, \dots, V^n ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene. Eine Ecke V^i heißt "Ohr" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.
- Satz (ohne Beweis):
Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat **mindestens 2 Ohren**.
- Satz (Fläche eines Polygons):
Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon V^1, \dots, V^n und einen beliebigen Punkt P in der Ebene gilt:

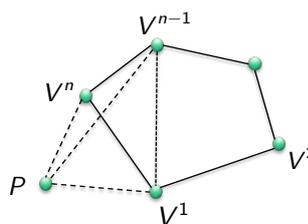
$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^n A(\triangle PV^i V^{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 26

- Beweis: Teil 1
 - Induktionsanfang: $n = 3$
Aus Satz auf Seite 21 \Rightarrow

$$A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$$

- Induktionsschritt: $n > 3$
o.B.d.A. ist $V^n = \text{Ohr}$
(sonst die V^i umnummerieren)
Nun gilt:



$$A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} A(PV^iV^{i+1})}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + A(PV^{n-1}V^1) + \underbrace{A(V^1V^{n-1}V^n)}_{\text{II}}$$

$$A(PV^1V^{n-1}) + A(PV^{n-1}V^n) + A(PV^nV^1)$$

\Rightarrow Behauptung

▪ Beweis Teil 2:

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2}(V^i - P) \times (V^{i+1} - P)$$

Wähle $P = 0 \Rightarrow$

$$A(PV^iV^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2}V^i \times V^{i+1}$$

\Rightarrow Behauptung

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 29

Geometrische Prädikate (Tests)

▪ Frage: sind zwei Kanten \overline{PQ} und \overline{RS} parallel?

▪ Lösung:

- \overline{PQ} parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q - P) \times (S - R) = 0$
- \overline{PQ} parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \frac{(Q - P)}{\|(Q - P)\|} \cdot \frac{(S - R)}{\|(S - R)\|} = 1$

▪ Beachte die numerische Robustheit!

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 30

- Frage: schneiden sich zwei koplanare Kanten?
- Das Prädikat: " \overline{PQ} und \overline{RS} schneiden sich" kann man mathematisch so fassen:

$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$
 und

$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 31

Konvexität

- Definition **Konvexität** (eine von vielen möglichen):
 Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist **konvex** \Leftrightarrow
 für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1P_2} \subseteq G$ ist.
- Bemerkung:
 - Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
 - Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist
- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist?
 - Lösung: berechne an jeder Ecke

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}, \quad \mathbf{v}_i = P_{i+1} - P_i$$
 und teste Vorzeichen der z-Komponente

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 32

Konstruktion eines Koordinatensystems

- Häufige Aufgabe:
 - Ein Vektor \mathbf{a} ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
 - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt irgendeine Orthonormalbasis
- Algo:
 1. Setze $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
 2. Für \mathbf{u} und \mathbf{v} benötigen wir irgend einen Vektor \mathbf{t} , der nicht kollinear zu \mathbf{w} ist;
z.B. setze $\mathbf{t} := \mathbf{w}$, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
 3. Setze $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 34

Das Spatprodukt

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

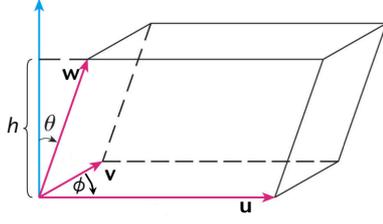
- Englische Begriffe:
scalar triple product, triple product, mixed product,

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 35

- Geometrische Interpretation:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$
- Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\text{Spat}) &= \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \phi \|\mathbf{w}\| \cos \theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta \\ &= \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\| \end{aligned}$$

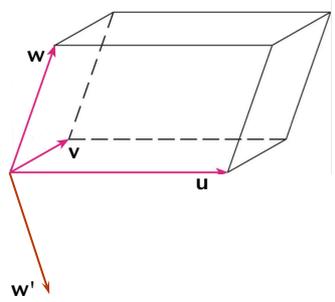


G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 36

- Erweiterung des Volumens um ein Vorzeichen:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$
- $\text{Vol}(\text{Spat}) > 0 \Leftrightarrow$
 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bilden ein Rechtssystem \Leftrightarrow
 Winkel zwischen $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ und $\mathbf{w} < 90^\circ$
- Bemerkung:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix}$$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 37

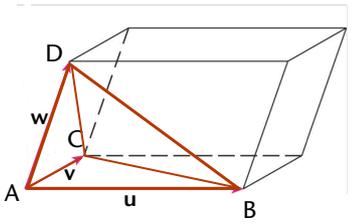
Denksportaufgabe

- Wenn man einen Würfel in Tetraeder zerschneidet, wieviele Tetraeder erhält man dann?

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 38

Das Volumen eines Tetraeders

- Es gilt:



$$\begin{aligned} \text{Vol}(ABCD) &= \frac{1}{6}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \\ &= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 39

Geometrische Prädikate 2

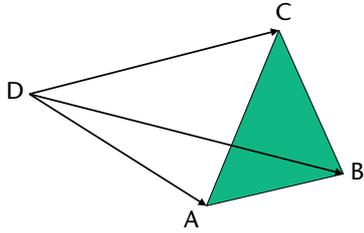
- Koplanarität:
 Drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} sind koplanar \Leftrightarrow

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$$
- Umlaufsinn im 3D:
 Drei Punkte A, B, C erscheinen von einem vierten Punkt D aus
 entgegen dem Uhrzeigersinn \Leftrightarrow

$$(A - D) \times (B - D) \cdot (C - D) < 0$$

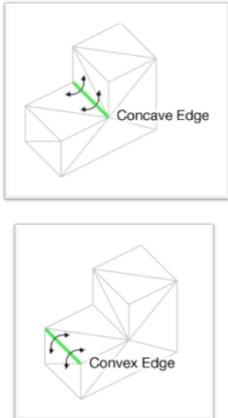
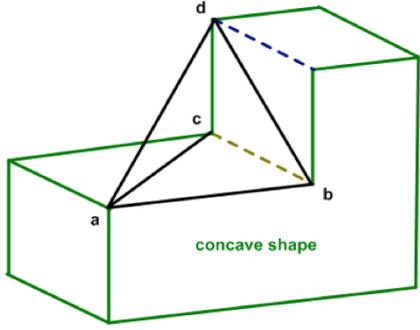
$$\Leftrightarrow \text{Vol}(DACB) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(ABCD) < 0$$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 40

Test auf Konvexität / Konkavität einer Kante:

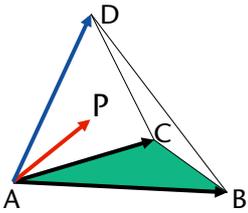
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 41

■ Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

Genau dann, wenn die Vorzeichen von

$\text{Vol}(ABCD)$
 $\text{Vol}(PBCD)$
 $\text{Vol}(APCD)$
 $\text{Vol}(ABPD)$
 $\text{Vol}(ABCP)$

alle gleich sind!



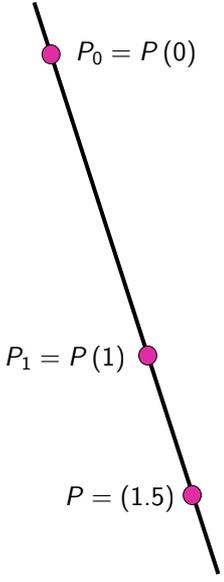
G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Wdhg. Mathe 42

■ Parametrische Geraden (*parametric line*)

■ Eine Geraden, die durch zwei Punkte geht
 $P_0 = (x_0, y_0), \quad P_1 = (x_1, y_1)$
 $P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$

■ Starte bei einem Punkt P_0 , mache einen Schritt t entlang dieser Gerade durch P_0 und P_1

■ Schreibweise: Punkte durch normale Großbuchstaben



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Wdhg. Mathe 47

Lineare Interpolation

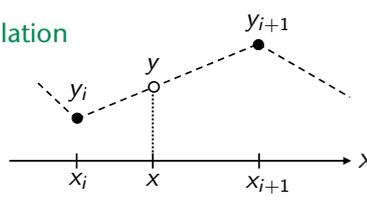
- Häufige Aufgabe in CG
 - Punkte, Farben, Höhen, etc., irgendwie interpolieren
- Gerade

$$p(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

ist schon lineare Interpolation im n -dim. Raum
- Variante: **stückweise lineare Interpolation**
 - Gegeben x_i, x_{i+1} und y_i, y_{i+1}
(= Höhe oder andere Semantik)
 - Gesucht y für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
 - Lineare Interpolation:

$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1] \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1 - t)y_i + ty_{i+1}$$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Wdhg. Mathe 48

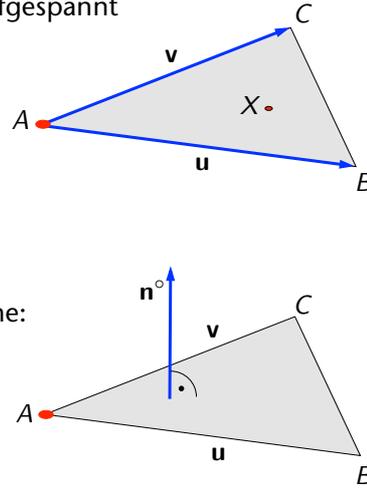
Ebenen / Dreiecke

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt
- Parameterdarstellung:

$$X = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$
- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0, 1), \quad s + t \leq 1$$
- Normale eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12
Wdhg. Mathe 49

Exkurs: Verallgemeinerung = Simplex im \mathbb{R}^d

- **Simplex :=**
 - $d + 1$ **affin unabhängige** Punkte
 - Verbindung dieser Punkte + "Inneres"
- **Beispiele:**
 - 0D: Punkt
 - 1D: Linie
 - 2D: Dreieck
 - 3D: Tetraeder
- **Allgemein:**
 - Punkte P_0, \dots, P_d
 - Simplex = alle Punkte X mit

$$X = P_0 + \sum_{i=1}^d s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^d s_i \leq 1$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 50

Normalenform (implizite Form)

$$\vec{AX} \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

$$(X - A) \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

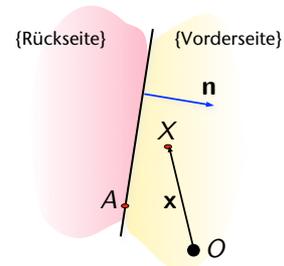
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ = 0$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - d = 0$$

- **Interpretation:**
 - Gerade durch den Ursprung in Richtung \mathbf{n}°
 - Jeder Punkt X ist ein Punkt der Ebene, gdw. er auf diese Gerade projiziert den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

G. Zachmann Computer-Graphik 1 – WS 11/12 Wdhg. Mathe 51

- Mini-Lemma:
Eine Ebene (\mathbf{n}, d) im \mathbb{R}^k definiert
3 Äquivalenzklassen:
"Vorderseite" := $\{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d > 0\}$
"Rückseite" := $\{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d < 0\}$
Ebene := $\{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d = 0\}$



- Warum ist die Beschriftung korrekt?
▪ Weil

$$(X - A) \cdot \mathbf{n} = |X - A| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos \theta$$